

# Тема 9. Ряды

## §1 Числовые ряды

### 1.1 Основные понятия

**Определение.** **Рядом** называется выражение вида  $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ , где числа  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  **называются членами ряда**.

Величина  $a_n$  – общий или  $n$ -й член ряда.

Члены ряда образуют бесконечную последовательность.

**Члены ряда могут обозначать числа, функции, векторы, матрицы и т.п.**

Очень часто ряд записывается в сокращенной форме:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Многоточие в конце записи указывает на то, что в выражении (1) нет последнего слагаемого.

Таким образом, ряд есть «бесконечная» сумма.

**Определение.** Ряд, все члены которого являются числами, называется **числовым**.

Примеры числовых рядов:

$$a) 1 + 2 + 4 + 8 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1},$$

$$б) 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \dots.$$

Ряд считается заданным, если известен его общий член  $a_n = f(n)$   $n = 1, 2, \dots$ , т. е. задана функция  $f(n)$  натурального аргумента.

**Пример.** Ряд с общим членом  $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n^2(n+1)}$

имеет вид

$$\frac{1}{1^2 \cdot 2} - \frac{1}{2^2 \cdot 3} + \frac{1}{3^2 \cdot 4} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n^2(n+1)} + \dots.$$

Более сложной является задача: по нескольким первым членам ряда составить общий член ряда.

**Пример.** Найти общий член ряда:  $\frac{2}{5} + \frac{4}{9} + \frac{6}{13} + \dots$ .

*Решение.* Заметим закономерности для числителей и знаменателей дробей. Числа 2, 4, 6, ... отличаются друг от друга на величину  $d = 2$ , т. е. эти числа образуют арифметическую прогрессию с  $a_1 = 2$ ,  $d = 2$ . Тогда величину  $a_n$

определим как общий член арифметической прогрессии  $a_n = a_1 + d(n - 1)$ .

Получим  $a_n = 2 + 2(n - 1) = 2n$ . Аналогично, числа 5, 9, 13, ... образуют арифметическую прогрессию со значениями  $a_1 = 5$ ,  $d = 4$ . Получим  $a_n = 5 + 4(n - 1) = 4n + 1$ .

В результате для ряда  $\frac{2}{5} + \frac{4}{9} + \frac{6}{13} + \dots$  общий член

ряда 
$$a_n = \frac{2n}{4n + 1}.$$

Сумма конечного числа  $n$  первых членов ряда

$$(1) \quad S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

называется  **$n$ -й частичной суммой** данного ряда.

**Определение.** Ряд называется **сходящимся**, если последовательность его частичных сумм

$$S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \dots,$$

$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$  при неограниченном возрастании  $n$  имеет конечный предел:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S.$$

(2)

Этот предел называется **суммой сходящегося ряда**. Если предел не существует или бесконечен, то ряд называется **расходящимся**.

Ряд, составленный из членов геометрической прогрессии со значениями  $b_1$  и  $q$  :

$$b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + \dots + b_1 q^{n-1} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} b_1 q^{n-1}$$

называется **геометрическим рядом**, где  $q \neq 0, |q| \neq 1$ .

Геометрический ряд сходится при величине  $|q| < 1$  и расходится при величине  $|q| > 1$ .

### **Свойства сходящихся рядов**

1. Если ряд  $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$  **сходится и имеет сумму  $S$** , то и ряд  $\lambda a_1 + \lambda a_2 + \dots + \lambda a_n + \dots$  (**полученный умножением данного ряда на число  $\lambda$** ) **также сходится и имеет сумму  $\lambda S$** .

2. Если ряды  $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$  и  $b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots$  **сходятся и имеют суммы соответственно  $S_a$  и  $S_b$** , то ряды:

$$(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \dots + (a_n + b_n) + \dots$$

(3)

и ряд  $(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + \dots + (a_n - b_n) + \dots$   
(4)

также сходятся, а их сумма и разность равна соответственно  $S_a + S_b$  и  $S_a - S_b$ .

**3. Если ряд сходится, то сходится и ряд, полученный из данного путем отбрасывания (или приписывания) конечного числа членов.**

**4. Если ряд  $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$  сходится, то сходится и ряд  $a_{n+1} + a_{n+2} + \dots$ , полученный отбрасыванием  $n$  первых членов ряда. Верно и обратное.**

**Определение.** Ряд  $r_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots$  называется  **$n$ -м остатком ряда**  
 $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ .

**5. Если ряд (1) сходится, то  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$ .**

**6. Над сходящимися рядами можно выполнять арифметические действия: сложение, вычитание, умножение, деление. Они выполняются как действия над многочленами.**

## 1.2 Необходимый признак сходимости ряда (теорема).

Если ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится, то его общий член  $a_n$  при неограниченном увеличении номера  $n$  стремится к нулю:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

(5)

**Замечание.** Это условие является необходимым, но не достаточным признаком сходимости, то есть из стремления общего члена ряда к нулю не обязательно следует сходимость ряда.

**Гармонический ряд**  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$

служит примером ряда, у которого предел

общего члена  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ , а сам этот ряд расходится

**Достаточный признак расходимости ряда.**

Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ , то ряд расходится.

**Пример.** Исследовать на сходимость ряд  
 $\frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \frac{3}{8} + \dots + \frac{n}{3n-1} + \dots$

Так как  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3n-1} = \frac{1}{3}$ , не равен 0, то ряд расходится.

Выявление сходимости рядов необходимо для того, чтобы выполнять действия над рядами. Только над сходящимися рядами можно выполнять определенные действия.

## 1.3 Знакоположительные ряды. Признаки сходимости знакоположительных рядов

**Определение.** Ряд называется **знакоположительным**, если все его члены положительны, т. е.  $a_i > 0$ .

### 1.3.1 Первый признак сравнения

Даны два ряда с положительными членами:

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \quad (6)$$

и

$$v_1 + v_2 + \dots + v_n + \dots \quad (7)$$

так, что  $u_n \leq v_n$ , т. е. каждый член (6)-го ряда не превосходит соответствующего члена (7)-го ряда. Тогда, если сходится ряд (7), то сходится ряд (6); если расходится ряд (6), то расходится и ряд (7).

**Следствие.** Условие  $u_n \leq v_n$  может выполняться начиная не обязательно с  $n=1$ . Утверждение теоремы справедливо, если это условие выполняется для всех  $n$ , больших некоторого  $N$ .

### **Замечания.**

1. На остальные случаи признак сравнения ответа о сходимости ряда не даёт.
2. Этим признаком пользуются, сравнивая данный ряд с рядом сравнения, сходимость которого известна.

Рядами для сравнения являются:

- а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ ,  $p \in \mathbb{R}$  – обобщенный гармонический ряд;



– при значении  $p = 1$  получаем  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  – гармонический ряд, расходится;

– при значении  $p > 0$  ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  называется рядом Дирихле. Этот ряд сходится при значении  $p > 1$  и расходится при значении  $0 < p \leq 1$ ;

– при значении  $p < 0$  ряд расходится;

б)  $\sum b_1 q^{n-1}$  – геометрический ряд;

– при значении  $0 < |q| < 1$  ряд **сходится**, при этом его сумма  $S = \frac{b_1}{1 - q}$ ;

– при значении  $|q| > 1$  ряд **расходится**.

**Пример.** Исследовать сходимость ряда:

$$\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 4} + \dots$$

(1)

$$u_1 = \frac{1}{\ln 2}; \quad u_2 = \frac{1}{\ln 3}; \quad u_3 = \frac{1}{\ln 4};$$

Будем сравнивать его с рядом, полученным из гармонического отбрасыванием первого члена

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots \quad (2)$$

$$v_1 = \frac{1}{2}; \quad v_2 = \frac{1}{3}; \quad v_3 = \frac{1}{4}; \dots$$

Имеем

$$\frac{1}{\ln 2} > \frac{1}{2}; \quad \frac{1}{\ln 3} > \frac{1}{3}; \quad \frac{1}{\ln 4} > \frac{1}{4}; \dots, \text{ т. е. } u_i > v_i.$$

Так как ряд(2) расходится, а члены ряда(1) больше членов ряда(2), то ряд(1) – расходится.

Нестандартность применения признака сравнения заключается в том, что надо не только подобрать соответствующий «эталонный ряд», но и доказать неравенство  $u_n \leq v_n$ , для чего часто требуется преобразование рядов (например, отбрасывание или приписывание конечного числа членов, умножение на определенные числа и т. п.). В ряде случаев более простым оказывается предельный признак сравнения.

### **1.3.2 Второй признак сравнения (предельный признак)**

Если  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  – ряды с

положительными членами и существует конечный предел отношения их общих членов

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = k \neq 0$ , то ряды одновременно

сходятся либо расходятся.

**Следствие.** При применении 2-го признака сравнения удобно брать в качестве ряда, с которым сравнивается данный ряд, ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}.$$

### 1.3.3 Признак Даламбера

Пусть для ряда  $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$  существует предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = L$ .

Тогда этот ряд сходится при значении  $L < 1$  и расходится при значении  $L > 1$ . При значении  $L = 1$  вопрос о сходимости ряда остается открытым, поэтому необходим другой признак.

**Пример.** Определить сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$$

$$u_n = \frac{n}{2^n}; \quad u_{n+1} = \frac{n+1}{2^{n+1}};$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)2^n}{2^{n+1}n} = \frac{n+1}{2n} = \frac{1+\frac{1}{n}}{2} = \frac{1}{2} < 1$$

Вывод: ряд сходится.

### 1.3.4 Радиальный признак Коши

Если для ряда  $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$

существует предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = L$ , то при значении  $L < 1$  ряд сходится, при значении  $L > 1$  – расходится.

Так же, как в признаке Даламбера,  $L = 1$  не дает ответа на вопрос о сходимости ряда.

**Пример.** Определить сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2n^2 + 1}{3n^2 + 5} \right)^n.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 1}{3n^2 + 5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{n^2}}{3 + \frac{5}{n^2}} = \frac{2}{3} < 1$$

Вывод: ряд сходится.

### 1.3.5 Интегральный признак Коши

Если функция  $y = f(x)$  непрерывна, монотонно убывающая при значении  $x \geq 1$  и такая, что  $f(n) = a_n$  при значении  $n \in N$ , где  $a_n$  – члены ряда  $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ , то данный ряд сходится или расходится, в зависимости от сходимости несобственного

интеграла  $\int_1^{\infty} f(x) dx$ . Например, обобщённый

гармонический ряд  $1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha} + \dots$

сходится при  $\alpha > 1$  и расходится при  $\alpha \leq 1$ , потому что  $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$  сходится при  $\alpha > 1$  и расходится при  $\alpha \leq 1$ .

### 1.4 Знакопеременные ряды

**Определение.** Если два стоящих рядом члена ряда имеют разные знаки, то ряд называется **знакопеременным**. Его вид:

$$a_1 - a_2 + a_3 - \dots + (-1)^{n-1} a_n + \dots$$

Вопрос о сходимости знакопеременного ряда решается с помощью следующего признака.

**Теорема (признак Лейбница).** Если члены **знакопередающего ряда**  $a_1 - a_2 + a_3 - \dots + (-1)^{n-1} a_n + \dots$  **удовлетворяют условиям:**

- 1)  $a_n \geq a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$ , т. е. члены ряда не возрастают (убывают) по абсолютной величине;
- 2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , то данный ряд сходится, а его сумма не превосходит первого члена ряда, т. е.  $S \leq a_1$ .

**Пример.** Ряд  $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$  сходится, т. к.

- 1)  $1 \dots$ ;
- 2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ .

**Замечание.** Если хотя бы одно условие признака Лейбница не выполняется, то ряд расходится.

Применение сходящихся рядов к приближенным вычислениям основано на замене суммы ряда суммой его нескольких первых членов.

Допускаемая при этом **погрешность** оценивается для знакопередающего ряда по признаку Лейбница.

**Следствие.** Погрешность суммы сходящегося знакопередающего ряда при приближенном вычислении по абсолютной величине меньше

абсолютного значения первого из  
отброшенных членов ряда:  $\delta < |a_{n+1}|$ .

## 1.5 Абсолютная и условная сходимость знакопеременного ряда

**Определение 1.** Если члены числового ряда имеют различные знаки, то ряд называется **знакопеременным**.

Рассмотрим знакопеременный ряд

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots, \quad (8)$$

у которого члены  $a_i$  различных знаков.

Составим ряд из абсолютных величин членов ряда (8) вида

$$|a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| + \dots. \quad (9)$$

**Определение 2.** Знакопеременный ряд

$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$  называется **абсолютно сходящимся**, если сам ряд сходится и ряд  $|a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| + \dots$ , составленный из абсолютных величин членов ряда тоже сходится.

Пример.  $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots$  -абсолютно сходится.

**Определение 3.** Знакопеременный ряд называется **условно сходящимся**, если сам он сходится, а ряд составленный из абсолютных величин его членов, расходится.

**Пример.** Ряд  $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$  - условно сходящийся, т. к. сам ряд сходится по признаку Лейбница, а ряд  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$  - расходится как гармонический ряд.

Абсолютно и условно сходящиеся ряды обладают различными свойствами.

### **Свойства абсолютно сходящихся рядов**

**1. Перестановка членов абсолютно сходящегося ряда не нарушает его сходимости.**

**2. Если  $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$  и  $b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots$  — абсолютно сходящиеся ряды с суммами  $S_a$  и  $S_b$  соответственно, то ряд:  $(a_1 \pm b_1) + (a_2 \pm b_2) + \dots + (a_n \pm b_n) + \dots$  также абсолютно сходящийся, а сумма его равна  $S_a \pm S_b$ .**

**3. Если  $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$  и  $b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots$  — абсолютно сходящиеся**



ряды с суммами  $S_a$  и  $S_b$  соответственно, то ряд  $(a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots) \cdot (b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots)$  также абсолютно сходящийся с суммой  $S_a \cdot S_b$ .

### Свойства условно сходящихся рядов

Перестановка членов условно сходящегося ряда может изменить сумму ряда и даже сделать его расходящимся.

**Теорема Римана.** При перестановке членов условно сходящегося ряда можно получить ряд, имеющий заранее заданную сумму, и даже расходящийся ряд.

## §2 Функциональные ряды. Степенные ряды

**Определение.** Ряд вида

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x),$$

членами которого являются функции  $u_n(x)$ , называется **функциональным**.

Функции  $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x), \dots$  определены на некотором множестве  $X$ .

Каждому значению  $x_0 \in X$  соответствует числовой ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ , который может быть сходящимся или расходящимся.

**Определение.** Если ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$  **сходится, то  $x_0$  называется точкой сходимости функционального ряда.**

**Определение.** Множество всех точек сходимости функционального ряда называется его **областью сходимости  $D$ .**

Если функциональный ряд сходится в области  $D$ , то он имеет сумму  $S(x)$  в этой области.

Рассмотрим один из функциональных рядов.

**Определение.**

**Ряд вида**

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n,$$

где  $a_n$ ,  $x$ ,  $x_0$  — действительные числа, называется **степенным рядом по степеням  $(x - x_0)$ .**

Числа  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  называются **коэффициентами степенного ряда.**

При значении  $x_0 = 0$  получим степенной ряд

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$$

(1)

**по степеням  $x$ .**

Далее будем рассматривать ряды вида (1), т. к. любой другой степенной ряд можно свести к ряду (1) подстановкой  $x - x_0 = x'$ .

**Теорема (Абеля).**

Если степенной ряд (1) сходится в точке  $x = x_0 \neq 0$ , то он сходится абсолютно в интервале, соответствующем неравенству:  
 $|x| < x_0$ .

**Следствие. Если в точке  $x_1 \neq 0$  степенной ряд (1) расходится, то он расходится во всех точках  $x$  таких, что  $|x| > x_1$ .**

Из теоремы Абеля и ее следствия вытекает, что если степенной ряд (1) сходится хотя бы в одной точке  $x \neq 0$ , то всегда существует число  $R > 0$  такое, что степенной ряд сходится абсолютно для всех  $x \in (-R; R)$  и расходится для всех  $x \in (-\infty; -R) \cup (R; +\infty)$ .

**Определение.** Величина  $R$  называется **радиусом сходимости**, а интервал  $(-R; R)$  – **интервалом сходимости** ряда (1),  $x = 0$  – середина интервала.

**Частные случаи:**

- если ряд сходится в точке  $x = 0$ , то  $R = 0$ ;  
 $x = 0$  – точка сходимости;
- если ряд сходится при всех  $x \in R$ , то  $R = \infty$ ;  
 $(-\infty; \infty)$  – интервал сходимости ряда.

На концах интервала ряд может либо сходиться (абсолютно или условно), либо расходиться.

Сходимость ряда при значениях  $x = \pm R$  надо исследовать по соответствующему признаку сходимости.

Для нахождения радиуса и интервала сходимости используют признак Даламбера, в редких случаях, радикальный признак Коши.

$\frac{1}{M} = R$  – радиус сходимости,  $\left(-\frac{1}{M}; \frac{1}{M}\right)$  – интервал сходимости ряда (1).

$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$  – формула для нахождения радиуса сходимости ряда.

Для определения сходимости ряда на концах интервала в степенной ряд (1) вместо значения  $x$  подставляются числа  $R$  и  $-R$ . Получаем два числовых ряда, которые исследуются по известным признакам сходимости.

**Замечание.** При исследовании на концах интервала сходимости для получающегося ряда с положительными членами применять признак Даламбера не имеет смысла, так как в этом случае всегда будем получать

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$$

**с нерешенным вопросом о**

**сходимости ряда; в этом случае рекомендуется рассматривать другие признаки сходимости.**

**Степенной ряд общего вида**

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$$

сводится к ряду (1) подстановкой  $x - x_0 = x'$ .

Получали ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x'^n$ .

Если  $R$  – радиус сходимости этого ряда, то ряд сходится абсолютно при значениях  $|x| < R$  и расходится при значениях  $|x| > R$ .

Тогда степенной ряд общего вида сходится абсолютно при значениях  $|x - x_0| < R$  и расходится при значениях  $|x - x_0| > R$ , где  $R$  – радиус сходимости,

$(x_0 - R; x_0 + R)$  – интервал сходимости,  $x_0$  – середина интервала.

### **Свойства степенных рядов**

**Рассмотрим свойства на примере ряда**

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$$

**1. Если радиус сходимости степенного ряда (1) отличен от нуля, то его сумма  $S(x)$  непрерывна на интервале сходимости  $(-R; R)$ .**

**2. Если радиус сходимости ряда отличен от нуля, то степенной ряд можно почленно дифференцировать и интегрировать любое число раз внутри интервала сходимости. При этом интервал сходимости не изменяется.**

**3. Внутри интервала сходимости ряды можно складывать, вычитать, умножать, делить,**

умножать на число. Интервал сходимости должен быть общим для этих рядов.

### §3 Ряды Тейлора и Маклорена

**Определение.** Если функция  $f(x)$  в некоторой окрестности точки  $x_0$  допускает разложение в степенной ряд по степеням  $(x - x_0)$ , то этот ряд называется **рядом Тейлора** функции  $f(x)$  в точке  $x_0$  и имеет вид:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dots \quad (1)$$

При значении  $x_0 = 0$  ряд Тейлора обычно называют **рядом Маклорена**.

В этом случае

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots \quad (2)$$

Но не всегда ряд Тейлора сходится к функции  $f(x)$ , для которой он составлен.

**Если  $S(x) = f(x)$  в интервале сходимости  $(x_0 - R; x_0 + R)$ , где  $S(x)$  – сумма ряда Тейлора, то говорят, что функция  $f(x)$  разложена в ряд Тейлора в окрестности точки  $x_0$ .**

**Так как определять сумму ряда достаточно сложно, то можно использовать следующий признак.**

### **Признак разложимости функции в ряд Тейлора.**

**Чтобы ряд Тейлора бесконечно дифференцируемой функции  $f(x)$  сходил к этой функции, необходимо и достаточно, чтобы остаточный член формулы Тейлора  $R_n$  стремился к нулю при значении  $n \rightarrow \infty$ , т. е.**  
$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$$
**для всех значений  $x$  из интервала сходимости ряда.**

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}, \text{ где } \xi \in (x_0, x) -$$

**остаточный член в форме Лагранжа.**

**Аналогично работает признак для ряда Маклорена. Но на практике чаще используется более удобный признак.**

### **Достаточный признак разложимости функции в ряд Тейлора.**



Если для любых  $x \in (x_0 - R; x_0 + R)$  все производные функции  $f(x)$  ограничены одной и той же константой  $M$ , то ряд Тейлора сходится к функции  $f(x)$  в интервале  $|x - x_0| < R$ .

## **§4 Разложение элементарных функций в ряд**

При представлении элементарной функции в виде ряда обычно поступают следующим образом:

- вычисляют последовательно производные данной функции в точке  $x = a$ ;
- составляют ряд и определяют область сходимости полученного ряда.

В этой области ряд Тейлора (Маклорена) сходится к порождающей его функции  $f(x)$ , если только все значения  $f(a), f'(a), \dots, f^{(n)}(a)$  получаются непосредственной подстановкой значения  $x = a$  в выражения  $f(x), f'(x), \dots, f^{(n)}(x)$ .

Получим разложение некоторых функций в ряд Маклорена

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

.

**1) Функция вида  $f(x) = e^x$**

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

Действительно,

$$f(x)=e^x; f'(x)=e^x; f''(x)=e^x; f'''(x)=e^x; \dots$$

$$f(0)=e^0=1; f'(0)=e^0=1; f''(0)=1;$$

$$f'''(0)=1; \dots$$

Подставляя эти значения в ряд Маклорена, получаем соответствующие разложения.

**Определим радиус сходимости полученного ряда по признаку Даламбера:**

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_n}{u_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{x^n}{n!} \right| = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x}{n+1} \right| = \frac{|x|}{\lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)} = 0, \text{ значит, } R = \infty. \end{aligned}$$

Тогда интервал сходимости полученного ряда  $(-\infty, +\infty)$ .

**Пример 1.** Разложить в ряд Маклорена функцию  $f(x)=e^{5x}$ .

Решение:

$$e^{5x} = 1 + \frac{5x}{1!} + \frac{5^2 x^2}{2!} + \dots + \frac{5^n x^n}{n!} + \dots$$

**Пример 2.** Разложить функцию  $f(x)=e^{5x}$  в ряд Тейлора по степеням  $(x-2)$ .

Решение:

$$e^{5x} = e^{(5(x-2))} \cdot e^{10} = e^{10} \cdot e^{(5(x-2))} = e^{10} * (1 + 5(x-2)/1! + (5^2(x-2)^2)/2! + \dots + \frac{5^n(x-2)^n}{n!} + \dots$$

**2) Функция вида  $f(x) = \sin x$**

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots$$

Действительно,  $f(x)=\sin x$ ;  $f'(x)=\cos x$ ;  
 $f''(x)=-\sin x$ ;  $f(0)=0$ ;  $f'(0)=1$ ;  $f''(0)=0$ ;  
 $f'''(0)=-1$ ;...

Подставляя эти значения в ряд Маклорена, получаем искомое значение.

**Определим радиус сходимости:**

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2(n+1)-1)!}{(2n-1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)!}{(2n-1)!} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-1) \cdot 2n \cdot (2n+1)}{(2n-1)} = \infty.$$

Тогда  $(-\infty, +\infty)$  – интервал сходимости полученного ряда.

**3) Функция вида  $f(x) = \cos x$**

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots +$$

$$+ (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

Так же, как и в случае с функцией  $\sin x$ , интервал сходимости ряда  $(-\infty, +\infty)$ .

Кроме того, данное разложение можно получить из разложения функции  $\sin x$  почленным дифференцированием.

**Пример.** Разложить в ряд Маклорена функцию  $f(x) = \cos^2 x$ .

*Решение:*

$$\cos^2 x =$$

$$\dots) = \frac{3}{2} - \frac{2}{2!}x^2 + \frac{2^3}{4!}x^4 - \frac{2^5}{6!}x^6 + \dots$$

**4) Функция вида**  $f(x) = \ln(1+x)$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots +$$
$$+(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \text{ на } (-1; 1].$$

**5) Функция вида**  $f(x) = (1+x)^m$

Биномиальный ряд сходится внутри интервала  $-1 < x < 1$  и расходится вне этого интервала.

Сходимость для значений  $x = 1$  и  $x = -1$  исследуется для каждого случая отдельно.

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2} x^2 +$$
$$+ \dots + x^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k .$$

**6) Функция вида**  $f(x) = \operatorname{arctg} x$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \text{ на } (-1; 1).$$

**Для разложения функции в ряд Тейлора (Маклорена) можно использовать известные разложения в ряд. При этом возможно использование следующих действий над степенными рядами внутри их промежутков сходимости:**

- два степенных ряда можно почленно складывать и умножать (по правилу умножения многочленов);
- степенной ряд можно почленно умножать на общий множитель;
- степенной ряд можно почленно интегрировать и дифференцировать любое число раз.

Так как степенной ряд для своей суммы есть ряд Тейлора, то полученное в результате указанных действий разложение будет искомым.

## **§5 Приложения степенных рядов**

### **5.1. Приближённое вычисление значений функции**

**Задача.** Найти приближенное значение функции  $f(x)$  в точке  $x_0$  с заданной степенью точности  $\varepsilon$ .

**Решение.** Разложим функцию  $f(x)$  в ряд по степеням  $(x - x_1)$  с интервалом сходимости, содержащим точку  $x_0$ , где  $x_1$  — точка, в которой значения функции, а также её производных легко вычисляются, давая точные значения.

Переменной  $x$  даем значение  $x_0$  и в числовом ряду  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x_0 - x_1)^n$  оставим только те члены, которые гарантируют заданную точность.

Число таких членов определяется по правилу:

— если ряд знакоположительный, то с помощью остаточного члена  $R_n(x_0)$  формулы Тейлора

$$R_n(x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!} x_0^{n+1}, \quad \zeta \in (x_0, x)$$

— если ряд знакочередующийся, то с помощью остатка  $r_n(x_0)$  ряда Тейлора

$$|r_n(x_0)| \leq u_{n+1}(x_0).$$

**Пример.** Вычислить  $\sin 20^\circ$  с точностью  $\varepsilon = 0,0001$ .

**Решение.** Имеем  $20^\circ = \frac{180^\circ}{9} = \frac{\pi}{9}$  и

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} - \text{знакопередающий ряд, значит, применим остаток ряда Маклорена.}$$

$$|r_n(x_0)| \leq u_{n+1}(x_0), \quad x = \frac{\pi}{9},$$

$$\left| r_n \left( \frac{\pi}{9} \right) \right| \leq \frac{\left( \frac{\pi}{9} \right)^{2(n+1)+1}}{(2(n+1)+1)!} \leq 0,0001, \quad \frac{\left( \frac{\pi}{9} \right)^{2n+3}}{(2n+3)!} \leq 0,0001.$$

Подбором, при значении  $n=1$  получим  $0,00004 \leq 0,0001$  – условие выполняется. Тогда,

$$\sin \frac{\pi}{9} = \frac{\pi}{9} - \frac{\left( \frac{\pi}{9} \right)^3}{3!} \approx \frac{\pi}{9} - \frac{\pi^3}{729 \cdot 6} \approx 0,34181.$$

**Пример.** Вычислить  $\ln 0,8$  с точностью  $\varepsilon = 0,0001$ .

**Решение.** Для вычисления  $\ln 0,8$  запишем ряд

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \dots. \text{ При}$$



$x = -0,2$ , входящем в область сходимости ряда  $(-1; 1]$ :

$$\begin{aligned}\ln 0,8 &= -0,2 - \frac{0,2^2}{2} - \frac{0,2^3}{3} - \dots - \frac{0,2^n}{n} - \dots = \\ &= -(0,2 + 0,02 + 0,00266 + 0,0004 + \dots).\end{aligned}$$

Если в качестве  $\ln 0,8$  взять первые четыре члена, мы допустим погрешность

$$\begin{aligned}|r_n| &= \frac{0,2^5}{5} + \frac{0,2^6}{6} + \dots + \frac{0,2^n}{n} + \\ &+ \dots < \frac{0,2^5}{5} + \frac{0,2^6}{6} + \dots + \frac{0,2^n}{5} + \dots = \frac{0,2^5}{5} \cdot \frac{1}{(1-0,2)} = \\ &= 0,00008 < 0,0001.\end{aligned}$$

$$\ln 0,8 \approx -(0,2 + 0,02 + 0,00266 + 0,0004) =$$

$$\text{Итак, } = -0,22306 \approx -0,2231.$$

**Пример.** Вычислить  $\sqrt[5]{36}$  с точностью  $\varepsilon = 0,0001$ .

**Решение.** Представим  $\sqrt[5]{36}$  в виде

$$\sqrt[5]{36} = \sqrt[5]{32 + 4} = 2 \left( 1 + \frac{1}{8} \right)^{\frac{1}{5}}. \text{ Так как } x = \frac{1}{8} \text{ входит в}$$

область сходимости степенного ряда  $(-1; 1)$ , то

при значениях  $x = \frac{1}{8}$ ,  $m = \frac{1}{5}$ , учитывая, что

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \\ + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \\ + \dots + \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + \dots,$$

получим:

$$\sqrt[5]{36} = 2 \left( 1 + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{8} + \frac{\frac{1}{5} \left( \frac{1}{5} - 1 \right)}{2!} \cdot \frac{1}{8^2} + \dots + \frac{\frac{1}{5} \left( \frac{1}{5} - 1 \right) \dots \left( \frac{1}{5} - n + 1 \right)}{n!} \cdot \frac{1}{8^n} + \dots \right) = \\ = 2 + 0,05 - 0,0025 + 0,000188 - 0,000016 + \dots \approx 2,0477$$

.

Для обеспечения данной точности расчета необходимо взять 4 члена, так как по следствию из признака Лейбница для сходящегося знакочередующегося ряда погрешность  $|r_n| \leq 0,000016 < 0,0001$ .

## 5.2. Приближённое вычисление определённых интегралов

**Многие определенные интегралы, не выражающиеся в элементарных функциях,**

могут быть вычислены с помощью рядов.

Отрезок интегрирования должен находиться внутри интервала сходимости ряда.

**Пример.** Вычислить интеграл  $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin x}{x} dx$  с точностью  $\varepsilon = 0,001$ .

**Решение.**  $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots, x \in R,$

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots,$$

отсюда

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin x}{x} dx &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left( 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots \right) dx = \left( x - \frac{1}{6} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1}{120} \cdot \frac{x^5}{5} - \frac{1}{5040} \cdot \frac{x^7}{7} + \dots \right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{18} \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{600} \cdot \frac{1}{32} - \dots \end{aligned}$$

Вычисляя члены этого ряда с точностью  $\varepsilon = 0,001$ , замечаем, что третий член ряда по абсолютной величине меньше 0,001.

Следовательно, для решения этой задачи, согласно признаку Лейбница, надо взять сумму первых двух членов, что обеспечит требуемую

точность  $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin x}{x} dx = 0,5 - 0,0069 \approx 0,4931$ .

## §6 РЯДЫ ФУРЬЕ

### 6.1 Основные понятия рядов Фурье

**Определение.** Функция  $f(x)$ , определенная на всей числовой оси называется *периодической*, если существует такое число  $T$  ( $T \neq 0$ ), что при любом значении  $x$  выполняется равенство  $f(x+T) = f(x)$ . Число  $T$  называется *периодом* функции.

#### Свойства периодической функции

1) Сумма, разность, произведение и частное периодических функций периода  $T$  есть периодическая функция периода  $T$ .

2) Если функция  $f(x)$  период  $T$ , то функция  $f(ax)$  имеет период  $\frac{T}{a}$ .

3) Если  $f(x)$  – периодическая функция периода  $T$ , то равны любые два интеграла от этой функции, взятые по промежуткам длины  $T$  (при этом интеграл существует), т. е. при любых  $a$  и  $b$  справедливо равенство

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_b^{b+T} f(x)dx.$$

Ряды Фурье (Фурье – французский математик и физик 1768–1830) используются для описания периодических процессов, решения дифференциальных уравнений, приближения периодических и непериодических функций. В этих случаях функцию, описывающую периодический процесс, представляют как сумму простых периодических функций  $A \sin(\omega x + \varphi_0)$ ,  $A$  – **амплитуда**,  $\omega x + \varphi_0$  – **фаза колебаний**,  $\varphi_0$  – **начальная фаза**.

Полагая  $A \sin \varphi_0 = a$ ,  $A \cos \varphi_0 = b$ , можно записать

$$A \sin(\omega x + \varphi_0) = A \sin(\omega x) \cos \varphi_0 + \\ + A \cos(\omega x) \sin \varphi_0 = a \cos(\omega x) + b \sin(\omega x).$$

Сложные процессы описываются функциями вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(\omega_n x) + b_n \sin(\omega_n x)).$$

Выражение вида  $c_0 \varphi_0(x) + c_1 \varphi_1(x) + \dots + c_n \varphi_n(x) + \dots$ , где  $\varphi_n(x)$  – основная тригонометрическая система функций, называется **тригонометрическим рядом Фурье**.

Основная тригонометрическая система функций:

$$\left( 1, \cos \frac{\pi x}{l}, \sin \frac{\pi x}{l}, \cos \frac{2\pi x}{l}, \sin \frac{2\pi x}{l}, \dots, \cos \frac{n\pi x}{l}, \sin \frac{n\pi x}{l}, \dots \right)$$

, определена на отрезке  $[-l, l]$ , где  $T = 2l$  –

период функции. Числа  $C_0, C_1, \dots, C_n, \dots$

называются **коэффициентами Фурье** функции  $f(x)$ .

## 6.2 Достаточные признаки разложимости функции в ряд Фурье

**Определение.** Точка  $x_0$  разрыва функции  $f(x)$  называют *точкой* разрыва первого рода, если существуют конечные пределы справа и слева этой функции в данной точке.

**Теорема Дирихле.** Если на отрезке  $[-l, l]$  функция  $f(x)$  имеет конечное число точек разрыва первого рода (или непрерывна) и конечное число точек экстремума (или не имеет их вовсе), то ее ряд Фурье сходится, т. е. имеет сумму  $S(x)$ , во всех точках этого отрезка. При этом:

1) в точках непрерывности функции  $f(x)$  он сходится к самой функции  $S(x) = f(x)$ ;

2) в каждой точке разрыва  $x_0$  функции сходится к полусумме односторонних пределов

функции справа и слева

$$S(x_0) = \frac{1}{2} \left[ \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) \right],$$

3) в обеих граничных точках отрезка  $[-l, l]$  сходится при стремлении величины  $x$  к этим точкам изнутри отрезка к полусумме односторонних пределов функции

$$S(-l) = S(l) = \frac{1}{2} \left[ \lim_{x \rightarrow -l + 0} f(x) + \lim_{x \rightarrow l - 0} f(x) \right].$$

### **6.3 Ряд Фурье для периодической функции с периодом $T = 2l$**

Тригонометрический ряд

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \left( \frac{\pi n x}{l} \right) + b_n \sin \left( \frac{\pi n x}{l} \right) \right) \quad (1)$$

называется **тригонометрическим рядом Фурье для периодической функции**  $f(x) \in [-l, l]$ , если коэффициенты его определяются по формулам:

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx,$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right) dx, \text{ где } n \in N,$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) dx, \text{ где } n \in N.$$

**Пример.** Разложить в ряд Фурье периодическую функцию  $f(x)$  с периодом  $T = 2l$ , которая на отрезке  $[-l, l]$  задана равенством  $f(x) = |x|$ .

*Решение.* Найдем коэффициенты ряда Фурье:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l |x| dx = \frac{1}{l} \int_{-l}^0 (-x) dx + \frac{1}{l} \int_0^l x dx = \\ &= \frac{1}{l} \left( -\frac{x^2}{2} \Big|_{-l}^0 + \frac{x^2}{2} \Big|_0^l \right) = \frac{1}{l} \left( \frac{l^2}{2} + \frac{l^2}{2} \right) = l, \\ a_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l |x| \cos \frac{\pi n x}{l} dx = \frac{2}{l} \int_0^l x \cos \frac{\pi n x}{l} dx = \\ &= \left| \begin{array}{ll} u = x & dv = \cos \frac{\pi n x}{l} \\ du = dx & v = \frac{l}{\pi n} \sin \frac{\pi n x}{l} \end{array} \right| = \\ &= \frac{2}{l} \left( \frac{x l}{\pi n} \sin \frac{\pi n x}{l} - \frac{l}{\pi n} \int_0^l \sin \frac{\pi n x}{l} dx \right) = \\ &= \frac{2}{l} \frac{l}{\pi n} \left( x \sin \frac{\pi n x}{l} + \frac{l}{\pi n} \cos \frac{\pi n x}{l} \right) = \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{\pi n} \left( l \sin \pi n + \frac{l}{\pi n} \cos \pi n - \frac{l}{\pi n} \right) = \\
&= \frac{2}{\pi n} \frac{l}{\pi n} (\cos \pi n - 1) = \frac{2l}{\pi^2 n^2} \left( (-1)^n - 1 \right) = \\
&= \begin{cases} \text{если } n - \text{четное, то } a_n = 0 \\ \text{если } n - \text{нечетное, то } a_n = -\frac{4l}{\pi^2 n^2} \end{cases}.
\end{aligned}$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l |x| \sin \frac{\pi n x}{l} dx = 0.$$

$$|x| = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \left( \frac{\pi n x}{l} \right) + b_n \sin \left( \frac{\pi n x}{l} \right) \right), \text{ т. к.}$$

$b_n = 0$ , то разложение примет вид

$$|x| = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \left( \frac{\pi n x}{l} \right) \right), \text{ следовательно, искомое}$$

разложение имеет вид:

$$\begin{aligned}
|x| &= \frac{l}{2} - \frac{4l}{\pi^2} \cos \frac{\pi x}{l} - \frac{4l}{\pi^2 3^2} \cos \frac{3\pi x}{l} - \\
&- \dots - \frac{4l}{\pi^2 (\pi n + 1)^2} \cos \frac{\pi(2n+1)x}{l} - \dots.
\end{aligned}$$

## 6.4 Ряд Фурье для периодической функции с периодом $[-\pi, \pi]$

Ряд Фурье для такой функции получается из ряда 1 при значении  $l = \pi$ .

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \text{ где}$$

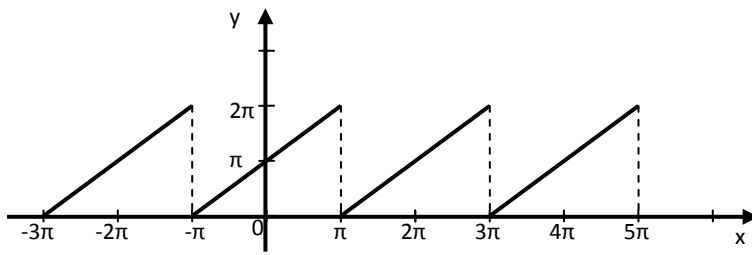
$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nxdx, \quad n \in N$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nxdx, \quad n \in N$$

**Пример.** Разложить в ряд Фурье функцию, заданную в промежутке  $[-\pi, \pi]$  уравнением  $f(x) = \pi + x$ .

*Решение.* Графиком этой функции является отрезок, соединяющий точки  $(-\pi, 0)$  и  $(\pi, 2\pi)$ . На рисунке показан график функции  $f(x) = \pi + x$ .



Эта функция является периодической с периодом  $T = 2\pi$ .

Определяем коэффициенты ряда Фурье. Сначала находим

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\pi + x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} dx + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x dx$$

.

Второй интеграл равен нулю как интеграл от нечетной функции, взятый по интервалу, симметричному относительно начала координат.

Таким образом, 
$$a_0 = \int_{-\pi}^{\pi} dx = x \Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi + \pi = 2\pi .$$

Далее находим коэффициенты  $a_n$  :

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nxdx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\pi + x) \cos nxdx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nxdx + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos nxdx .$$

Оба интеграла равны нулю, т. к.

подынтегральная функция второго интеграла является нечетной как произведение четной и

нечетной функций. Итак,  $a_n = 0$ , т. е.

$$a_1 = a_2 = a_3 = \dots = 0.$$

Определяем теперь коэффициенты  $b_n$ :

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\pi + x) \sin nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx dx.$$

Первый интеграл равен нулю. Подынтегральная функция второго интеграла – четная как произведение двух нечетных функций. Таким

образом,  $b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx dx$ .

Решим данный интеграл, интегрированием по частям:

$$u = x \quad dv = \sin nx dx$$

$$du = dx \quad v = -\frac{1}{n} \cos nx, \text{ т. е.}$$

$$b_n = -\frac{2}{n\pi} x \cos nx \Big|_0^{\pi} + \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} \cos nx dx =$$

$$= -\frac{2}{n} \cos n\pi + \frac{2}{\pi n^2} \sin nx \Big|_0^{\pi} = -\frac{2}{n} \cos n\pi =$$

$$-\frac{2}{n} (-1)^n = \frac{2}{n} (-1)^{n+1}.$$

Следовательно, разложение функции  $f(x) = \pi + x$  в ряд Фурье имеет вид:

$$f(x) = \pi + x = \pi + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx =$$

$$= \pi + 2 \left( \sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \dots \right).$$

## 6.5 Ряд Фурье для чётных и нечётных функций

Если функция  $f(x)$  четная на  $[-l, l]$ , т. е.  $f(-x) = f(x)$ , то график симметричен относительно оси  $Oy$ , определенный интеграл рассматривается как площадь криволинейной трапеции.

$$\int_{-l}^l f(x) dx = 2 \int_0^l f(x) dx$$

Если  $f(x)$  нечетная функция на  $[-l, l]$ , т. е.  $f(-x) = -f(x)$ , то график симметричен относительно начала координат. Получим

$$\int_{-l}^l f(x) dx = \int_{-l}^0 f(x) dx + \int_0^l f(x) dx = \int_0^l (-f(x) + f(x)) dx = 0.$$

Произведение двух четных или двух нечетных функций есть четная функция. Произведение четной и нечетной есть нечетная функция.

Тогда:

– если  $f(x)$  – четная функция на отрезке  $[-l, l]$ , то  $a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) dx$ ,

$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{\pi n x}{l} dx$ ,  $b_n = 0$ , при этом функция разлагается в ряд Фурье только по косинусам

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{\pi n x}{l};$$

– если  $f(x)$  – нечетная функция на  $[-l, l]$ , то  $a_0 = a_n = 0$ ,

$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx$ , при этом функция

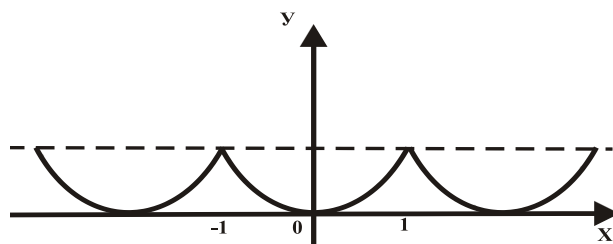
раскладывается в ряд Фурье только по синусам

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{\pi n x}{l};$$

– если  $f(x)$  ни четная, ни нечетная функция, то ее тригонометрический ряд Фурье содержит и синусы, и косинусы.

**Пример.** Разложить в ряд Фурье функцию, заданную на отрезке  $[-1; 1]$  уравнением  $f(x) = x^2$ .

*Решение.*



Рассматриваемая функция является четной, т. к.  
 $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$ . Ее график – дуга  
 параболы, заключенная между точками  $(-1; 1)$  и  
 $(1; 1)$ . Здесь  $l = 1$ , поэтому:

$$a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) dx = 2 \int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3},$$

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx = 2 \int_0^1 x^2 \cos n\pi x dx.$$

Здесь следует дважды интегрировать по частям:

$$1) \ u = x^2, \ dv = \cos n\pi x dx, \ du = 2x dx, \ v = \frac{1}{n\pi} \sin n\pi x,$$

$$a_n = \frac{2x^2}{n\pi} \sin n\pi x \Big|_0^1 - \frac{4}{n\pi} \int_0^1 x \sin n\pi x dx = -\frac{4}{n\pi} \int_0^1 x \sin n\pi x dx$$

;

$$2) \ u = x, \ dv = \sin n\pi x dx, \ du = dx, \ v = -\frac{1}{n\pi} \cos n\pi x,$$

$$a_n = \frac{4x}{n^2 \pi^2} \cos n\pi x \Big|_0^1 - \frac{4}{n^2 \pi^2} \int_0^1 \cos n\pi x dx = \frac{4}{n^2 \pi^2} (-1)^n.$$

Так как рассматриваемая функция – четная, то  
 $b_n = 0$ . Следовательно,

$$f(x) = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos n\pi x =$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{4}{\pi^2} \left( \cos \pi x - \frac{\cos 2\pi x}{2^2} + \frac{\cos 3\pi x}{3^2} - \frac{\cos 4\pi x}{4^2} + \dots \right).$$

## 6.6 Ряд Фурье для непериодических функций

Ранее было показано, что в ряд Фурье разлагаются только периодические функции с периодом  $T = 2l$  или  $T = 2\pi$ , т. к. функции

$$\sin \frac{\pi n x}{l} \text{ и } \cos \frac{\pi n x}{l} \text{ периодические.}$$

Если функция  $f(x)$  не является периодической, то, чтобы разложить ее в ряд Фурье, строят некоторую периодическую функцию  $f^*(x)$ , которая в области определения функции совпадает с функцией  $f(x)$ . В этом случае говорят, что функцию  $f(x)$  периодически продолжают на всю числовую ось.

Возможны следующие случаи:

1. Если функция  $f(x)$  задана на  $[-l, l]$ , то строят функцию  $f^*(x)$  с периодом  $T = 2l$ . Она на отрезке  $[-l, l]$  совпадает с функцией  $f(x)$ , а



на остальной части числовой оси является ее периодическим продолжением.

2. Если функция  $f(x)$  задана на  $[a, a + 2l]$ , то строят  $f^*(x)$  с периодом  $T = 2l$ , которая на отрезке  $[a, a + 2l]$  совпадает с функцией  $f(x)$  и т.д. Коэффициенты Фурье будут находиться по известным формулам 1, только пределами интегрирования являются  $a$  и  $a + 2l$ .

3. Если функция  $f(x)$  задана на отрезке  $[0, l]$ , то для разложения в ряд Фурье достаточно ее доопределить на отрезке  $[-l, 0]$  произвольным способом. Затем разложить в ряд Фурье, считая ее заданной на отрезке  $[-l, l]$ . Наиболее целесообразно функцию доопределить так, чтобы ее значения в точках отрезка  $[-l, 0]$  находились из условия  $f(-x) = f(x)$  или  $f(-x) = -f(x)$ . В первом случае функция  $f(x)$  на отрезке  $[-l, l]$  будет четной, а во втором – нечетной. При этом коэффициенты разложения такой функции ( $a_n$  в первом случае,  $b_n$  – во втором) можно определить по вышеперечисленным формулам для коэффициентов четных и нечетных функций.

## 6.7 Элементы гармонического анализа

Разложение периодической функции в ряд Фурье называется *гармоническим анализом*.

Рассмотрим слагаемые ряда Фурье.

Значение  $a_0$  равно среднему значению функции  $f(x)$  на всей оси.

Первое непостоянное слагаемое называется *основной гармонической*, оно имеет период  $T = 2l$ .

Остальные слагаемые называются *верхними гармониками*, их наименьшие периоды равны  $\frac{2l}{1}; \frac{2l}{3}; \frac{2l}{4}; \dots$

Если независимая переменная рассматривается как время, то ряд Фурье описывает произвольное периодическое колебание в виде суммы гармонических колебаний с кратными частотами.

Например, в акустике: основное слагаемое определяет высоту звука, т. е. основной тон; остальные слагаемые описывают обертоны, от которых зависит тембр звука.

Ряды Фурье используются в решении задач математической физики, а также их применяют при изучении различных зависимостей в электрических цепях с несинусоидальными токами.